CONTROL DE GEOMETRÍA **16 Abril-2002**

1) a) Calcula algún valor del parámetro **m** para que el producto vectorial: (1,2,m) x (1,m,0) tenga la dirección del eje OZ. **(1 punto)**

b) Sean A(1,-5,m), B(3,m,0) y C(m,-5,2) los vértices del triángulo ABC. Determina el valor de **m** para que el triángulo ABC sea rectángulo en A. **(1 punto)**

2) Halla para qué valores de **k** son paralelos el plano π: x + ky – z + 1 = 0 y la recta $r \equiv \frac{x+1}{2} = y = \frac{z-1}{-2}$. **(1´5 puntos)**

3) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1,2,3) y es paralela a la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+3y-z=-2 \\ x-y+3z=4 \end{cases}$. **(2 puntos)**

4) a) Halla la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$ y $s: x = y = \frac{z-1}{5}$. **(1´5 puntos)**

b) Calcula la ecuación del plano que contiene a r y pasa por el punto (0,0,1). **(1 punto)**

5) a) Dado el tetraedro ABCD, calcula las ecuaciones de los planos que contienen a cada una de sus caras. A(-1,2,6), B(2,1,6), C(4,2,7) y D(-1,5,5). **(1 punto)**

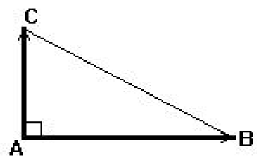
b) Halla el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$. **(1 punto)**

SOLUCIONES

1)a) $\begin{matrix}(1,2,m)\\(1,m,0)\end{matrix} \rightarrow (1,2,m)x(1,m,0) = \left(\begin{vmatrix} 2 & m \\ m & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & m \end{vmatrix} \right) = (-m^2, m, m-2) = a(0,0,1)$

(para que sea paralelo al vector $\vec{k}$); $\rightarrow \begin{matrix} -m^2 = 0 \\ m = 0 \\ m-2 = a \end{matrix} \rightarrow m = 0 \quad y \quad a = -2$

b)



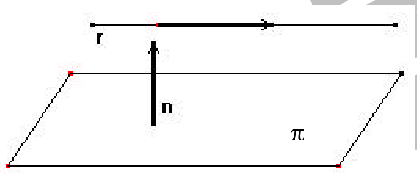
Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ deben ser perpendiculares,

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0;\ \vec{AB} = (2, m+5, -m),\ \vec{AC} = (m-1, 0, 2-m)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2(m-1) + 0 + (-m) \cdot (2-m) = 0 \rightarrow m^2 - 2 = 0$

$m = \pm\sqrt{2}$

2) Para que el plano y la recta sean paralelos debe ocurrir que el vector perpendicular al plano, $\overrightarrow{n_\pi}$, y el vector director de la recta, $\overrightarrow{d_r}$, sean perpendiculares.



$\overrightarrow{n_\pi} = (1, k, -1)$, $\overrightarrow{d_r} = (2,1,-2) \rightarrow \overrightarrow{n_\pi} \cdot \overrightarrow{d_r} = 0$

$2 + k + 2 = 0 \rightarrow k = -4$

3) Hay que hallar la dirección de la recta r, para ello se hallan las ecuaciones paramétricas de r resolviendo el sistema.

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 3y - z = -2 \\ x - y + 3z = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -2 + z \\ -2x + 2y = -8 + 6z \end{cases} \rightarrow 5y = -10 + 7z$$

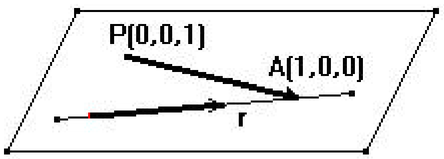
$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -2 \\ x - y + 3z = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -2 + z \\ 3x - 3y = 12 - 9z \end{cases} \rightarrow 5x = 10 - 8z \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 5 - \frac{8}{5}t \\ y = -5 + \frac{7}{5}t \\ z = t \end{cases} \rightarrow \vec{d_r} = (-8,7,5)$$

$$r' = \begin{cases} x = 1 - 8t \\ y = 2 + 7t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$$

4) a) $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{2}$ y $s: x = y = \dfrac{z-1}{5}$, para estudiar la posición relativa se hallan, primero, las ecuaciones paramétricas. $r \equiv \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1+5t \end{cases}$ y ahora se resuelve el sistema determinado por las ecuaciones de r y s.

$$\begin{cases} 1+2t = t´ \\ 3t = t´ \\ 2t = 1+5t´ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1+2t = 3t \\ \\ 2t = 1+15t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ \\ t = -\dfrac{1}{13} \end{cases}$$

, por lo tanto el sistema es incompatible y no se cortan. Los vectores directores de **r** y **s** son $\overrightarrow{d_r} = (2,3,2)$ y $\overrightarrow{d_s} = (1,1,5)$, no son proporcionales, luego **r y s se cruzan**.



b) $\vec{PA} = (1,0,-1);\ \vec{d_r} = (2,3,2);\ A = (1,0,0)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 3x - 4y + 3z - 3 = 0$$

5) a) Plano ABC:

$$A(-1,2,6),\ \vec{AB} = (3,-1,0),\ \vec{AC} = (5,0,2) \rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-6 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x + 3y - 5z - 35 = 0$$

Plano ABD:

$$A(-1,2,6),\ \overrightarrow{AB} = (3,-1,0),\ \overrightarrow{AD} = (0,3,-1) \rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-6 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x + 3y + 9z - 59 = 0$$

Plano ACD:

$$A(-1,2,6),\ \overrightarrow{AC} = (5,0,2),\ \overrightarrow{AD} = (0,3,-1) \rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-6 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 6x - 5y - 15z + 106 = 0$$

Plano BCD:

$$B(2,1,6),\ \overrightarrow{BC} = (2,1,1),\ \overrightarrow{BD} = (-3,4,-1) \rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-6 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 5x + y - 11z + 55 = 0$$

b) $\overrightarrow{AB} = (3,-1,0),\ \overrightarrow{AC} = (5,0,2),\ \overrightarrow{AD} = (0,3,-1) \rightarrow$ Volumen $= \left\| \begin{matrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{matrix} \right\| = |-23| = 23u^3$